REVISTA
ORINOQUIA
CIENCIA Y SOCIEDAD

Vol. IV - 2020
ISSN 2422-2917 Digital
2422-197X Impreso
Artículo de Divulgación

Historia de puentes y conexiones: Una introducción a la teoría de redes

History of bridges and connections: An introduction to network theory

Diego Espitia[1]*

Resumen
En este artículo haremos una breve introducción a la teoría de redes. Hablaremos de cómo recorrer puentes en una antigua ciudad prusiana dio origen a una de las más interesantes ramas de la matemática: la teoría de grafos. Ésta, permite estudiar propiedades importantes de las redes, las cuales se han convertido en herramienta indispensable para estudiar: células, animales, seres humanos, etc. La teoría de redes, se encuentra en el centro del estudio de los sistemas complejos; una nueva disciplina que en los últimos años ha permeado todos los campos del ámbito científico, convirtiéndose en una pieza fundamental para estudiar el mundo desde una perspectiva multidisciplinaria.

Palabras Claves: Grafos — Redes — Sistemas Complejos

Abstract
In this article, network theory is going to be briefly introduced. We will talk about how to walk by the bridges of an old Prussian city, gave rise to graph theory: one of the foremost fields in mathematics. This theory allows us to study important properties of networks, which have become an indispensable tool to study: cells, animals, humans, etc. The network theory is at the core of the study of complex systems; a new discipline that in the last years has permeated all of the scientific fields, becoming a key element to study the world from a multidisciplinary perspective.

Keywords: Graphs — Networks — Complex Systems

[1] *Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, México.*
***Autor para correspondencia**: taraldarion6@gmail.com

Introducción: Los siete puentes de Königsberg

¿Por qué los alcaldes son casi siempre abogados?¿Por qué sería importante que el alcalde de una ciudad tenga conocimiento científico? La respuesta a la primera pregunta quizá jamás se obtendrá. La respuesta a la segunda pregunta por el contrario, nos llevará a conocer un poco sobre cómo la curiosidad de un hombre, llevó a la formulación de uno de los problemas más interesantes en la historia de las matemáticas, y cuya solución se encuentra en el núcleo del estudio de los sistemas complejos, un campo muy relevante en la actualidad.

Esta historia comienza en el año de 1735, cuando el alcalde de la ciudad prusiana[1] de Königsberg, Carl Gottlieb Ehler, se preguntó sobre cómo los ciudadanos recorrían los puentes de la ciudad. Veamos, la ciudad de Königsberg estaba atravesada por el río Pregolia, y en medio del río había dos islas, conectadas por un puente, y a su vez, otros 6 puentes conectaban a las islas con tierra firme (ver Figura 1).

Cuando un visitante llegaba, los ciudadanos de Königsberg siempre hacían la siguiente pregunta: ¿Qué ruta le permitiría a alguien cruzar los siete puentes, atravesando cada uno de ellos una sola vez? Imaginate que eres un visitante de Königsberg y tómate un momento para encontrar la respuesta a éste interrogante.

Seguro habrás podido notar que la respuesta es **NO**, dicha ruta no existe. Eso lo sabían todos los ciudadanos de Königsberg, y los que visitaban la ciudad lo aprendían al recorrer los puentes, y ahora lo sabes tú.

Sin embargo, lo que intrigaba al alcalde Carl, era el porqué no existía dicho camino. ¿Qué misteriosa configuración se escondía en los puentes, que hacía imposible recorrerlos todos pasando solo una vez por cada uno de ellos? Esta duda motivó a Carl Gottlieb Ehler a escribirle a Leonard Euler, el matemático más famoso y respetado de su tiempo.

Euler, al que le apodaban el cíclope porque era ciego de un ojo (y del otro casi que también), al oír de su secretario la carta del alcalde Carl, le pidió que le respondiera lo siguiente:

[1] Prusia es la denominación de un antiguo territorio, que corresponde aproximadamente a la actual Alemania.

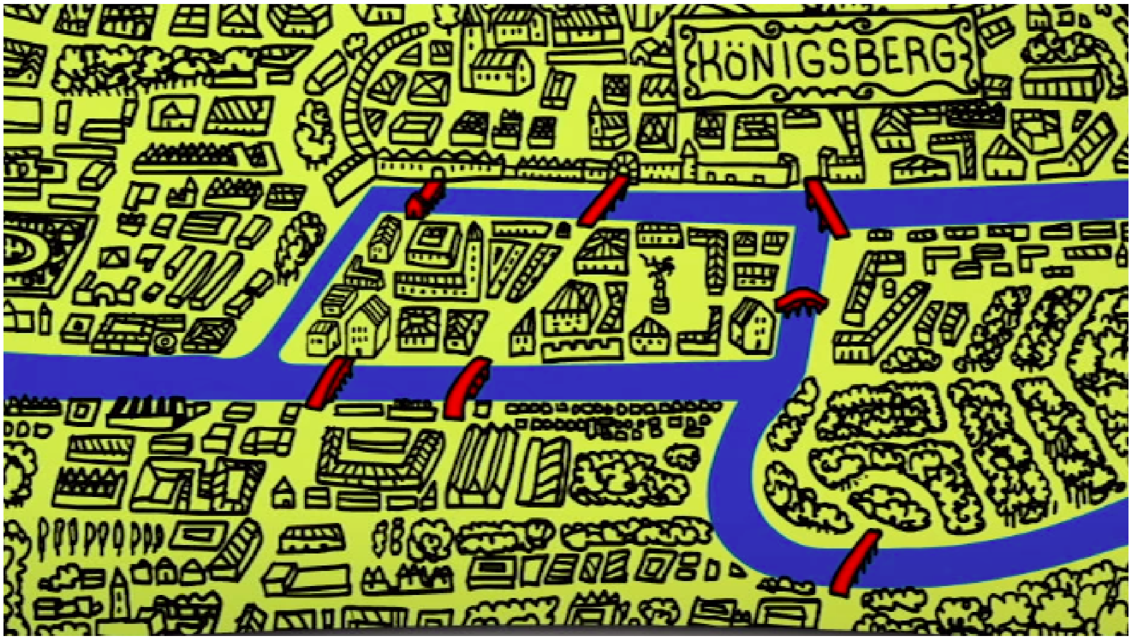

Figura 1. Distribución de los puentes de Königsberg en el siglo XVIII. ¿Qué ruta le permitiría a alguien cruzar los siete puentes, atravesando cada uno de ellos una sola vez? Imagen tomada de (Van der Vieren, 2016)

–Oigan a mi tía, que dizque yo siendo matemático, haciéndole la tarea de resolver ¡un problema tan tonto! Hermano, cualquier persona con lápiz, papel, y tres guaros encima podría responder a su pregunta, que nada tiene que ver con matemáticas. Suerte es que le deseo, agonía.

–Pero, Don Leonardo – le respondió el secretario – no podemos escribir eso–.

–¿No?, bueno entonces escriba: Por lo tanto, noble señor, verá usted, que este tipo de cuestiones tiene poca relación con las matemáticas y no entiendo por qué espera usted que un matemático las responda en lugar de cualquier otra persona, ya que la solución se basa solo en la razón, y su descubrimiento no depende de ningún principio matemático (Hopkins y Wilson, 2004). Suerte es que le deseo, agonía.

Al día de hoy, no se sabe a ciencia cierta cuánta cantidad de alcohol ingirió Leonard Euler, lo que se sabe es que tiempo después, fue fuerte su curiosidad y decidió responder el interrogante que el alcalde Carl había planteado sobre los puentes de Königsberg, lo que dio origen a una nueva rama de las matemáticas: la teoría de grafos.

1. Y los puentes se convirtieron en grafos

Para resolver el enigma de los puentes de Königsberg, Euler inventó una nueva rama de las matemáticas: la teoría de grafos. Primero, Euler dibujó la disposición espacial de los puentes de manera más simple (Ver Figura 2).

Cada una de las porciones de tierra, es decir: las dos orillas y las dos islas, las representó como puntos. A estos puntos los llamó nodos. Dichos nodos estaban conectados entre sí por los siete puentes, que representó como líneas, a las que llamó aristas. Este conjunto de nodos y aristas recibe ahora el nombre de grafo, y es la pieza central de la teoría matemática inventada por Euler.

Es muy importante recalcar que el grafo no es una representación “a escala” de la ciudad de Königsberg. Las distancias que separan a los puentes, o la posición de estos en cada una de las porciones de tierra no son importantes, lo único que importa es cómo se conectan los nodos y las aristas.

Recordemos la pregunta del alcalde Carl: ¿Por qué no existe un camino que le permita a alguien cruzar los siete puentes, atravesando cada uno una sola vez? La respuesta de Euler fue que el camino que alguien tomaba para entrar o salir de una isla, o una orilla, no importaba para nada, lo realmente importante era el número de entradas o salidas que tenía cada una de las porciones de tierra. Veamos, la isla del centro (Figura 1, o nodo cuatro de la Figura 2) tiene cinco puentes o aristas para entrar (o salir). De manera análoga los otros nodos, tienen 3 aristas cada uno.

Para responder a la pregunta de Carl lo importante es contar el número de aristas que tiene cada uno de los nodos. A éste número se le conoce como el **grado** de un nodo, y estudiar los grados de un nodo es una de las tareas importantes en la teoría de grafos.

Ahora bien, ¿por qué el grado importa? Bueno, de acuerdo al reto, una vez que los viajeros lleguen a una isla o una orilla (por algún puente), tendrán que salir obligatoriamente por otro puente (para no repetir); es decir, el número de puentes (el grado) que conducen desde y hacia cada nodo, en cualquier ruta, debe ser un número par para que se pueda entrar o salir de alguna porción de tierra sin repetir puente. Para esto se necesita que los nodos tengan grados pares. Viendo el grafo de la Figura 2, se observa que los cuatro nodos tienen grados impares. Entonces,

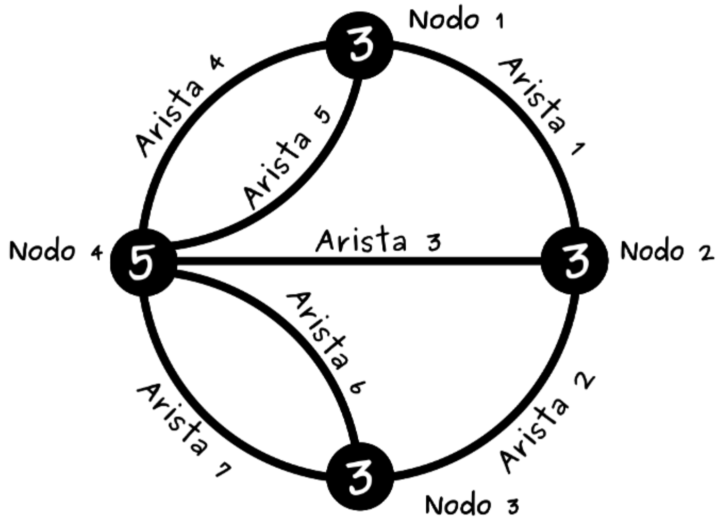

Figura 2. Distribución de los puentes de Königsberg según Euler. Cada nodo es representado por un punto, y dentro de éste, con tipografía color blanco, se indica el grado (número de puentes) del nodo.

sin importar cuál camino se tome, en algún punto se necesitará cruzar un puente dos veces.

Euler usó esta prueba para formular una teoría general para cualquier grafo de dos o más nodos. Un camino que visita cada arista (puente) una sola vez es solamente posible en dos casos:

1. Sí el grafo tiene **únicamente** dos nodos de grado impar, siendo el resto pares. No obstante, el recorrido debe comenzar y terminar en los nodos de grado impar.

2. Todos los nodos **deben** tener grado par. De esta forma, cada camino empezará y terminará en el mismo nodo. Esto se conoce como un ciclo euleriano.

Dadas estas condiciones, podemos preguntarnos si existe alguna configuración de puentes que cumpla alguno de los casos anteriormente mencionados. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, pero triste. Sí existe tal configuración pero para conseguirla, se necesita una guerra; y no cualquier guerra: se necesita la segunda guerra mundial.

En 1944, los soviéticos bombardearon la ciudad de Königsberg, destruyendo dos de los puentes y permitiendo así recorrer los puentes bajo la premisa original.

Tras el final de la segunda guerra mundial, la ciudad pasó a manos de los soviéticos, quienes la cambiaron de nombre. Ahora la ciudad se llama Kaliningrado y hace parte de la Federación Rusa. A la fecha, solo 2 de los puentes originales permanecen, y puentes nuevos han sido construidos, cambiando la configuración original del problema de los puentes de Königsberg.

2. De grafos a redes

Probablemente todos tenemos una idea al menos intuitiva de lo que es una red. Pues bien, los grafos y las redes están relacionados y comparten ciertas propiedades. De hecho, la diferencia escencial entre un grafo y una red es que el grafo tiene unos cuantos nodos, y una red puede estar compuesta de ¡millones de nodos! Veamos dos ejemplos: Instagram y Facebook, éstas son redes que permiten conectarnos con diferentes personas al rededor del mundo. Podemos pensar que cada miembro de Instagram o Facebook es un nodo, y ser seguidor o amigo de alguien, es una arista.

Sin embargo, dichas redes sociales son solo la representación virtual de algo que existe desde el origen de la humanidad. Los seres humanos somos primates que formamos redes sociales, con conexiones de amistad o de sangre entre nosotros. Dichas conexiones, han sido claves para dar forma a procesos evolutivos muy importantes. Y no solo los primates formamos redes sociales: las hormigas, las abejas, las ballenas, por mencionar algunos ejemplos, son animales que también tienen estructuras sociales muy complejas e interesantes; por eso, aprender teoría de redes nos permite estudiar tanto a estos animales como a nosotros mismos.

Ahora bien, los seres humanos no solo intercambiamos chismes, fotos y *likes*; también intercambiamos, entre otras muchas cosas, enfermedades ¿Te suena el covid 19 de algo? Como podrás adivinar, para entender cómo se propaga una enfermedad en una comunidad es **muy** importante conocer cómo dicha comunidad está conectada. El estudio de las redes permite identificar que grupos presentan mayores riesgos y, de esa manera, diseñar, políticas de salud pública que pueden ayudar a mitigar las consecuencias de las enfermedades.

Una de las propiedades que tiene un papel muy importante en la teoría de redes es la distribución de los grados de un nodo, que identificaremos como $p(k)$; siendo k, la letra con la que nombraremos al grado de un nodo. Entonces, $p(k)$ será la probabilidad de que un nodo, seleccionado al azar en una red tenga un grado k.

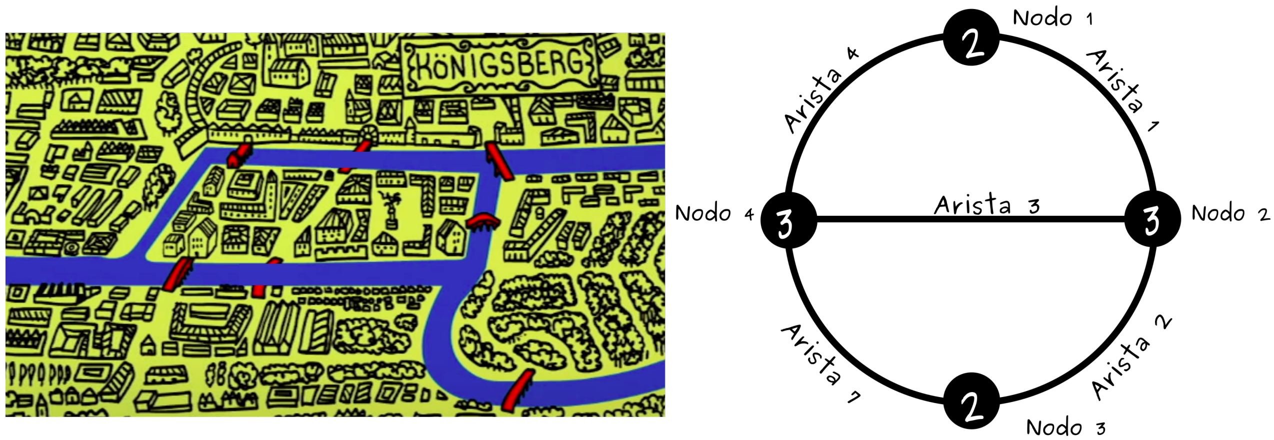

Figura 3. Distribución de los puentes de Königsberg tras la segunda guerra mundial. Ahora es fácil hacer el recorrido de la pregunta original. Nótese que solo es posible hacerlo si empezamos desde uno de los nodos de grado impar.

Para obtener $p(k)$ (Barabási, 2016), usamos la expresión:

$$p(k) = \frac{N_k}{N}, \tag{1}$$

donde N_k es el número de nodos con un k dado, y N es el número total de nodos. Para mayor claridad veamos algunos ejemplos.

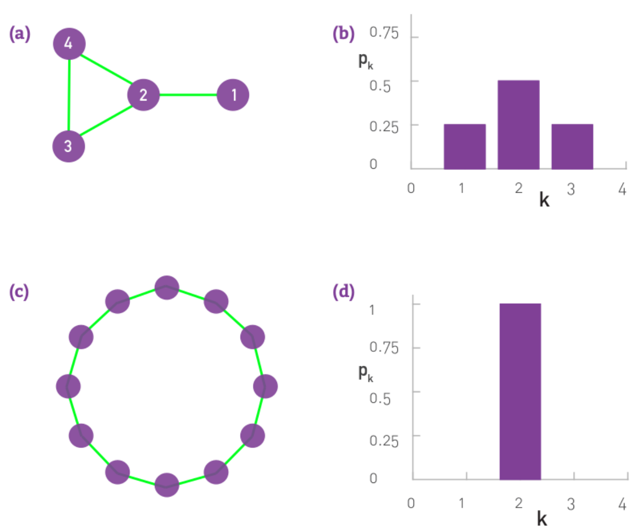

Figura 4. Ejemplos de grafos simples y sus distribuciones de grados. Imagen tomada de (Barabási, 2016).

En la Figura 4 tenemos dos ejemplos de grafos sencillos. El grafo(a) consta de 4 nodos, es decir, $N = 4$; el nodo que etiquetamos con el número 1 tiene un grado $k = 1$. El nodo 2 tiene grado $k = 3$; los nodos 3 y 4 tienen ambos grados $k = 2$. Si aplicamos la ecuación (1) es fácil ver que:

$$\begin{aligned} p(1) &= \frac{1}{4} = 0.25 \\ p(2) &= \frac{2}{4} = 0.50 \\ p(3) &= \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned} \tag{2}$$

Aquellos que hayan estudiado algo de probabilidad reconocerán en la Figura 4(b) el histograma del grafo de la Figura 4(a). Un histograma es una representación gráfica de la frecuencia (normalizada) de cantidades de interés, en este caso son los grados de los nodos del grafo. De la Figura 4(b) es fácil ver que la probabilidad de que un nodo elegido al azar en el grafo tenga grado $k = 2$ es de 0.5.

El grafo representado en la Figura 4(c), tiene una estructura (que en el argot de la teoría de redes se le llama *topología*) bastante simple. Todos los nodos tienen grado $k = 2$, y la probabilidad de elegir al azar un nodo de grado $k = 2$ es de 1. De igual manera, de la Figura 4(d) se puede inferir que la probabilidad de elegir un nodo con grado $k \neq 2$ es de 0.

Vamos ahora a hacer las cosas un poco más interesantes. En la Figura anterior, un vistazo rápido bastaba para decir si el grafo tenía todos los nodos con $k = 2$ o, por el contrario, los nodos del grafo tenían diferentes valores de k. Si aumentamos los nodos del grafo, convertimos a éste en una red, tal como se ve en la Figura 5.

En la Figura 5, tenemos representaciones gráficas de dos redes distintas. Aquí el número de nodos es de $N = 545$, para las dos redes. Sin embargo, ahora es difícil decir cómo es la topología de las redes. A simple vista lo único que parece poder apreciarse es que la red verde tiene menos aristas que la red azul[2].

Podemos ahora preguntarnos por las diferencias entre la red azul y la verde. Para ello, usamos nuevamente la ecuación (1), que es, como ya dijimos, la distribución de grados de la red. Dicha distribución permite clasificar las redes de acuerdo con su topología en dos tipos: las **redes libres de escala** y las **redes aleatorias**.

En la Figura 6(a) vemos la distribución de grados para una red libre de escala. En este caso no hemos hecho otra cosa que aplicar la ecuación (1), solo que usamos un computador para contar k en cada nodo de la red (en lugar de hacerlo a mano); con esta información hacemos el histograma, usando puntos en lugar de barras y usando una escala logarítmica en los ejes x y y (Un truco

[2]De hecho la red verde tiene 9564 aristas, mientras que la red azul tiene 136825 aristas.

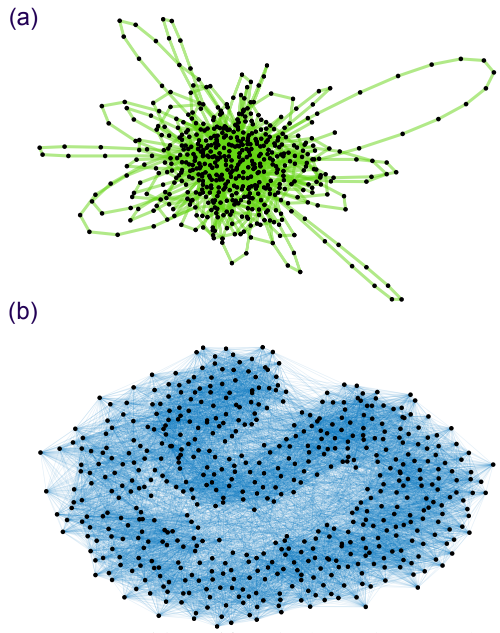

Figura 5. Representación gráfica de dos redes. Las dos redes tienen 545 nodos, pero la cantidad de aristas es diferente para cada una.

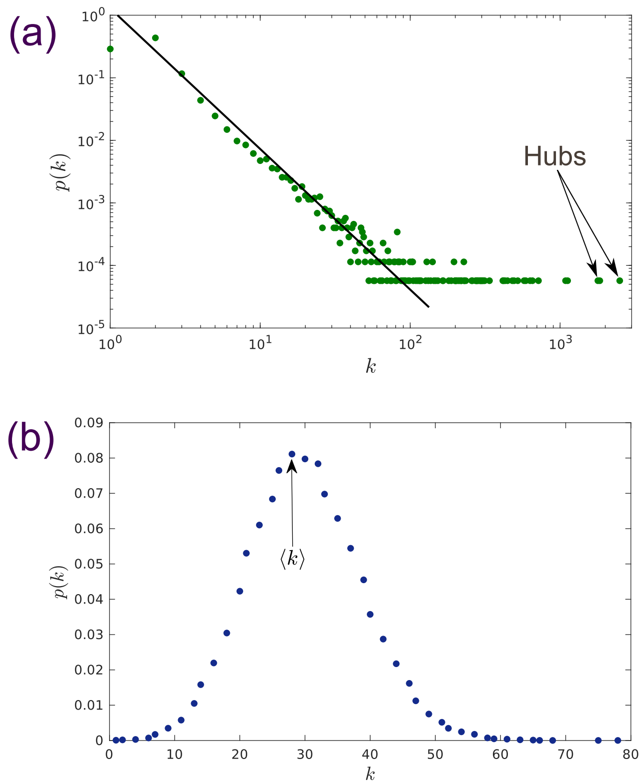

Figura 6. (a) Distribución de grados de una red libre de escala. (b) Distribución de grados de una red aleatoria.

bastante común, que solamente re-escala los datos cuando estos abarcan varios ordenes de magnitud). Adicionalmente usamos un método estadístico apropiado para estimar los parámetros de $p(k)$.[3] Las redes libres de escala, tienen una distribución de grados que sigue una *ley de potencias* de la forma:

$$p(k) = Ck^{-\alpha}, \tag{3}$$

donde C es una constante que depende de la red y α es la pendiente de la línea recta de la Figura 6(a).

En la Figura 6(b) vemos la distribución de grados para una red aleatoria. En este caso $p(k)$ es de la forma

$$p(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \tag{4}$$

donde $\langle k \rangle$ es el grado promedio de la red y $k!$ es el factorial del grado. La distribución de probabilidad de la ecuación (4) se conoce como *distribución de Poisson*.

Si comparamos las ecuaciones (3) y (4), es claro que la red verde y azul tienen estructuras o topologías muy diferentes. Esta diferencia radica en la forma como se conectan los nodos de la red. En la red azul, los nodos se conectan entre sí aleatoriamente, sin preferencia alguna (esto es lo que significa la ecuación (4)), teniendo la gran mayoría de ellos un $k \approx 29$, esto es el $\langle k \rangle$. Dicho de otra manera, si elegimos al azar alguno de los nodos de la red azul, lo más probable es que obtenga un nodo con un grado cercano a 29.

Por otro lado, para la red verde, si elijo al azar alguno de los nodos de la red, lo más probable es que obtenga un nodo con $k = 2$. Lo importante aquí es que los nodos de esta red sí tienen preferencias en las conexiones con otros nodos. De la Figura 6(a) podemos ver que en la red libre de escala existe un nodo que tiene ¡cerca de 2500 conexiones, y otro con casi 2000! Por el contrario, aunque en la red aleatoria (azul) hay muchas más conexiones que en la red verde, prácticamente todos los nodos tienen el mismo grado; (cercano a 29), siendo el k mínimo igual a 1, y el k máximo igual a 78.

Estos nodos con k muy grande reciben el nombre de *hubs*. Y son extremadamente importantes en el estudio de las redes libres de escala. Por ejemplo, en Instagram y Facebook la persona con más seguidores es Cristiano Ronaldo, con 228 millones y 126 millones de seguidores respectivamente. Es decir, para éstas redes sociales, CR7 es un *hub*. Conocer a los *hubs* de la red es información muy valiosa para las empresas, que a través de éstas personas pueden publicitar sus marcas y tener el potencial de llegar a millones de clientes; es decir, volverse "virales".

Es importante notar lo siguiente: para que una publicación se haga "viral", debe pasar por alguno de los *hubs* de la red. Es muy poco probable que alguna de nuestras fotos o videos se vuelva viral por sí sola (a menos que seamos famosos).

Pensemos ahora en redes sociales de verdad, las que establecemos cada día con otras personas. Pensemos, por ejemplo, que somos, cada uno, un nodo en la red, y que hablar con alguien, cara

[3] Es importante notar que estos datos representan distribuciones de probabilidad; por lo tanto, una regresión lineal NO ES el método correcto para ajustar los datos. Para estos casos se deben estimar los parámetros de la distribución de probabilidad, y para ello se usa un método estadístico conocido como *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Para el lector interesado en (Clauset et al., 2009), puede encontrar información sobre el MLE.

a cara, sería una arista, es decir, una conexión o interacción en la red. Tomando en cuenta lo que hemos aprendido hasta ahora, si la red es libre de escala, entonces habrá personas que podrán interactuar con cientos (o incluso miles) de individuos en un día (los *hubs* de la red); éstas personas son fundamentales para hacer algo "viral", enfermedades por ejemplo. En epidemiología, a estas personas se les denomina como *superpropagadores*.

De este análisis es importante recalcar que una red es una herramienta importantísima para estudiar las interacciones entre nodos. Dado que, dichos nodos pueden representar prácticamente cualquier cosa que podamos imaginar, la teoría de redes es una parte central en el estudio de los sistemas complejos.

Un sistema complejo es aquel formado por muchas partes que interactuan entre sí y con su entorno. Dichas interacciones pueden dar lugar a comportamientos colectivos muy interesantes, que no poseen, de manera individual, los componentes del sistema. Pensemos como ejemplo de un sistema complejo a los idiomas. Cada palabra por sí sola tiene un significado, pero para comunicar algo efectivamente es necesario juntar a las palabras de manera coherente y así poder escribir los versos más tristes esta noche. Escribir, por ejemplo: "La noche está estrellada, y tiritan, azules, los astros, a lo lejos" [4].

3. Conclusiones

En este artículo hemos visto como la teoría de redes nos puede ayudar a entender mejor el mundo en que vivimos. Aunque hemos hecho énfasis en redes sociales, no solo los humanos formamos redes: la internet en sí misma, es una red; las telecomunicaciones son también redes, los aeropuertos, las hormigas, las organizaciones criminales, son todos ejemplos de redes.

En biología por ejemplo, estudiar la interacción entre genes (redes genéticas) o las reacciones químicas que ocurren en las células de los seres vivos (redes metabólicas), requiere conocer la distribución de grados que hemos descrito aquí.

Las palabras en un texto pueden usarse también como nodos, y se puede usar la teoría de redes para identificar patrones estadísticos que permiten determinar propiedades de los lenguajes, que difícilmente se obtienen desde el estudio de la lingüística solamente.

Aunque aquí hemos hablado de la distribución de grados de una red, existen muchas otras propiedades muy importantes que aportan información clave para entender las interacciones entre los nodos de una red. Y es justamente en el estudio de las interacciones donde los sistemas complejos adquieren relevancia en muchos de los campos de investigación de la actualidad. Al estudiar sistemas complejos, a menudo se encuentra que aunque los sistemas pueden parecer diferentes, la descripción matemática se vuelve igual para muchos de ellos, y por lo tanto se dice que los sistemas complejos tienen propiedades universales; siendo éste el origen de la multidisciplinariedad, que parece ser el sello de esta nueva disciplina.

[4]Poema 20 de Pablo Neruda.

Referencias

Barabási, A. (2016). *Network Science*. Cambridge University Press.

Clauset, A., Shalizi, C. R., y Newman, M. E. J. (2009). Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review*, 51(4):661.

Hopkins, B. y Wilson, R. (2004). The truth about königsberg. *The College Mathematics Journal*, 35(2):198.

Van der Vieren, D. (2016). *How the Königsberg bridge problem changed mathematics*. [Archivo de video] Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=nZwSo4vfw6c.